This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

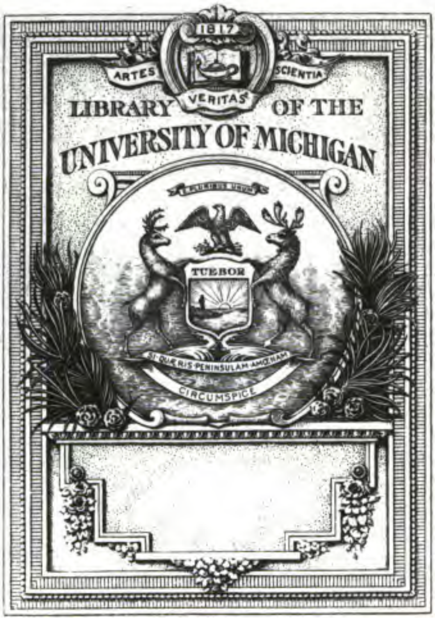
Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
308
.L63

MEMOIRE

SUR

LE CALCUL INTEGRAL.

MEMOIRE
SUR
LE CALCUL INTEGRAL

PAR

LE P. THOMAS LE SEUR

PROFESSEUR DE MATHEMATIQUE
DANS L' UNIVERSITE' DE LA SAPIENCE.

A ROME M. DCC. XLVIII.

CHEZ LES FRERES PAGLIARINI
MARCHANDS LIBRAIRES.

AVEC PERMISSION DES SUPERIEURS.

QA
308
.L63

Hist of Science
Magliore
12-12-37
27187

MEMOIRE
SUR
LE CALCUL INTEGRAL.

DE la manière d' integrer par la quadrature des sections coniques la differentielle $\frac{pdx}{q}$, *dans la quelle* p *&* q *expriment des polynomes quelconques, comme* $a + bx^m + cx^n + \&c$, *ou les produits de ces polynomes multipliès ensemble, ou même leurs puissances; pourvù neanmoins que les exposans* m, n, *&c. de la variable* x *soient des nombres rationels; que les constantes* a, b, c, *&c. soient rèelles, & que les exposans des puissances, aux quelles ces polynomes sont elevès, soient des nombres entiers.*

I. Il est evident, que la differentielle $\frac{pdx}{q}$ est egale a une fraction, ou a la somme de plusieurs fractions, dont le denominateur commun est q, & les numerateurs sont des produits des puissances de x multipliées par dx & par des quantités constantes. Car soit par exemple $p = (a + bx^{\frac{3}{2}})^2$; en faisant le quarré de $a + bx^{\frac{3}{2}}$, on aura $\frac{pdx}{q} = \frac{a^2dx}{q}$ $+ \frac{2abx^{\frac{3}{2}}dx}{q} + \frac{b^2x^3dx}{q}$.

II. Donc si l'on peut integrer, de quelque maniére que ce soit, la fraction $\frac{x^m dx}{q}$, dans la quelle l'exposant m est un nombre rationel quelconque, ou zero; on pourra aussi trouver de la même maniére l'integrale de la differentielle proposée $\frac{pdx}{q}$: car l'integrale $S.\frac{pdx}{q}$ dans l'exemple proposé est $= a^2 S.\frac{dx}{q} + 2ab\, S.\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{q} + b^2 S.\frac{x^3 dx}{q}$; les constantes, par les quelles le numerateur $x^m dx$ peut être multiplié ou divisé, ne faisant point de difficulté dans l'integration.

III. Si les exposans de x dans la differentielle $\frac{x^m dx}{q}$ ne sont pas tous des nombres entiers, on pourra toûjours changer cette differentielle en une autre, qui lui sera egale, & dans la quelle les exposans de la variable seront tous des nombres entiers. Car soit proposée la differentielle $\frac{x^{\frac{n}{r}} dx}{\left(a + bx^{\frac{s}{t}}\right)^{\delta}}$. On n'a qu'a prendre le plus petit nombre entier λ, qui puisse être exactement divisé par les nombres r & t, & ayant fait $x = z^{\lambda}$, & substitué z^{λ} au lieu de x dans la differentielle proposée, on la changera en celle ci $\frac{\lambda z^{\frac{\lambda n}{r} + \lambda - 1} dz}{\left(a + bz^{\frac{\lambda s}{t}}\right)^{\delta}}$ dans la quelle tous les exposans de la variable z sont des nombres entiers.

On

On peut reduire de la même maniére toute autre differentielle.

$$\frac{x^{\frac{m}{n}}\,dx}{\left(a+bx^{\frac{r}{s}}+cx^{\frac{t}{u}}+\&c.\right)^{\delta}\times\left(f+gx^{\frac{u}{\nu}}+hx^{\frac{\varpi}{\tau}}+\&c.\right)^{\epsilon}\times\&c.}$$

Car en prenant le plus petit nombre entier λ, qui puisse être exactement mesuré par n, s, u, ν, τ, &c., & en substituant z^{λ} aulieu de x, on aura la fraction

$$\frac{\lambda z^{\frac{\lambda m}{n}+\lambda-1}\,dz}{\left(a+bz^{\frac{\lambda r}{s}}+cz^{\frac{\lambda t}{u}}+\&c.\right)^{\delta}\times\left(f+gz^{\frac{\lambda\mu}{\nu}}+hz^{\frac{\lambda\varpi}{\tau}}+\&c.\right)^{\epsilon}\times\&c.}$$

Dans la quelle tous les exposans de la variable sont des nombres entiers.

IV. Si la variable x dans la fraction $\frac{x^m\,dx}{V}$ a des exposans negatifs, on pourra toûjours changer cette fraction en une autre egale, dans la quelle la variable n'aura que des exposans positifs. On n'a pour cela qu'a multiplier le numerateur & le denominateur de la fraction par une puissance de x, dont l' exposant soit positif & egal au plus grand exposant negatif de la même variable x; ce qui ne change rien dans la valeur de la fraction. Soit proposée la fraction

$$\frac{x^{m}\,dx}{\left(a+bx^{-n}+\&c.\right)^{\delta}\times\left(e+fx^{-r}+\&c.\right)^{\gamma}\times\&c.}$$

Et que $-n$ soit le plus grand exposant negatif dans le polynome $a+bx^{-n}+\&c.$, & $-r$ le plus grand exposant nega-

 tif

tif dans le polynome $e + fx^{-r} +$ &c. ; & ainsi des autres : d'ou il suit que le plus grand exposant negatif de x dans le denominateur de cette fraction est $-\delta n - \varepsilon r -$ &c. Multipliant donc le numerateur & le denominateur par $x^{\delta n + \varepsilon r + \&c.}$ on aura la fraction

$$\frac{x^{m + \delta n + \varepsilon r + \&c.} dx}{\left(ax^{n} + b + \&c.\right)^{\delta} \times \left(ex^{r} + f + \&c.\right)^{\varepsilon} \times \&c.}$$

egale a la proposée & telle que tous les exposans de x dans le denominateur sont positifs. L' exposant $m + \delta n + \varepsilon r + \&c.$ de x dans le numerateur sera aussi positif, si m est un nombre positif, ou si m etant negatif, $\delta n + \varepsilon r + \&c.$ est plus grand que m. Mais si m est negatif & plus grand que $\delta n + \varepsilon r + \&c.$ en sorte que $m + \delta n + \varepsilon r + \&c.$ soit un nombre negatif, comme $-s$; on n'a qu'a multiplier le numerateur & le denominateur de la fraction par x^{s} pour rendre tous les exposans de x positifs.

On peut encore rendre positif l' exposant du numerateur dans la fraction

$$\frac{x^{-s} dx}{\left(ax^{n} + b + \&c.\right)^{\delta} \times \left(ex^{r} + f + \&c.\right)^{\varepsilon} \times \&c.}$$

sans multiplier le numerateur & le denominateur par x^{s}. Car si l' on fait $x = z^{-1}$, & qu'on substituë par tout z^{-1} au-lieu de x, & $-z^{-2}dx$ au lieu de dx, la fraction sera changée en celle ci

$$\frac{-z^{s-2} dz}{\left(az^{-n} + b + \&c.\right)^{\delta} \times \left(ez^{-r} + f + \&c.\right)^{\varepsilon} \times \&c.}$$

dans

dans la quelle on rendra tous les exposans positifs, en multipliant le numerateur & le denominateur par $z^{\delta n + \varepsilon r + \&c.}$ Il faut excepter le cas de $s = 1$, lorsque le denominateur q est constant; car pour lors la fraction devient $\frac{-z^{-1}dz}{q}$, dont l' integrale se trouve par la quadrature de l' hyperbole.

V. On peut toûjours reduire la fraction $\frac{x^m dx}{q}$ de telle sorte, que la plus haute puissance de la variable x dans chacun des polynomes, dont le denominateur q est composé, ne soit multipliée que par $+1$. Car soit $q = (a + bx^n + \&c.)^\delta \times (e + fx^r + \&c.)^\varepsilon \times \&c.$; & que n soit l' exposant de la plus haute puissance de x dans le premier polynome $a + bx^n + \&c.$, r l' exposant de la plus haute puissance de x dans le second polynome $e + fx^r + \&c.$; & ainsi du reste. Qu'on divise le premier polynome par $+b$, le second par $+f$, &c. & le numerateur par $b^\delta f^\varepsilon$ &c. la fraction proposée deviendra

$$\frac{\frac{1}{b^\delta f^\varepsilon \&c.} x^m dx}{\left(\frac{a}{b} + x^n + \&c.\right)^\delta \times \left(\frac{e}{f} + x^r + \&c.\right)^\varepsilon \times \&c.}$$

qui a la condition requise.

VI. On voit par tout ce qui vient d' etre êtabli, que l' integration de la differentielle proposée se reduit a celle de la fraction

$$\frac{x^m dx}{(x^n + ax^r \ldots\ldots + c)^\delta \times (x^s + ex^t \ldots\ldots + f)^\varepsilon \times \&c.}$$

dans

dans la quelle tous les exposans m, n, r, s, t, δ, ε, &c. sont des nombres entiers positifs, ou zero, & la plus haute puissance de la variable x dans chaque polynome du denominateur n'est multipliée que par $+1$. Et si l'on eleve actuellement les polynomes du denominateur a leurs puissances respectives, dont les exposans sont δ, ε, &c., & qu'on les multiplie ensemble, cetre derniere fraction acquerera cette forme

$$\frac{x^m dx}{x^\mu + ax^\nu + bx^\pi \ldots\ldots + g}$$

dans la quelle tous les exposans m, μ, ν, π, &c. sont des nombres entiers positifs.

VII. Je designe par R ce denominateur, en sorte que la fraction dont on cherche l' integrale, soit $\frac{x^m dx}{R}$. Et si R est une quantité constante, ou une puissance quelconque de la variable x; on sçait assés, que cette fraction pourra toûjours être integrée ou algebraïquement, ou par la quadrature de l' hyperbole. Il ne nout reste donc qu'a chercher l' integrale de cette fraction dans les autres cas, ou R n' est ni une quantité constante, ni une puissance seule de x. Mais pour entrer dans cette recherche, j' ay besoin des definitions suivantes.

J' appelle binome la quantité $x^n + a$, dans la quelle a est constante & réelle, positive ou negative; & l'exposant n de la variable x, est un nombre entier positif.

Le Trinome est une quantité $x^{2n} + ax^n + b$, dans la quelle a & b sont constantes & réelles, positives ou negatives, n un nombre entier positif, & les exposans $2n$, n, o, dans les trois termes sont en proportion arithmetique continuë.

Le Quadrinome est une quantité $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c$, dans la quelle a, b, c, sont constantes & réelles, n un nombre

bre entier positif, & les exposans $3n$, $2n$, n, o, en progression arithmetique continue; de sorte neanmoins, que l' un des deux termes du milieu, ax^{2n}, ou bx^{n} peut manquer, en faisant a, ou $b = o$. C'est pourquoy les quantité $x^{3n} + bx^{n} + c$, & $x^{3n} + ax^{2n} + c$ sont des quadrinomes.

Le Quinquinome, ou quintinome, est une quantités $x^{4n} + ax^{3n} + bx^{2n} + cx^{n} + e$ dans la quelle a, b, c, e, sont constantes & réelles, n un nombre entier positif, & les exposans $4n$, $3n$, $2n$, n, o en progression arithmetique continue; de sorte neanmoins que des trois quantités a, b, c, une quelconque, ou même deux, sçavoir c, & b, ou a & b, peuvent manquer, mais non pas a & e; car $x^{4n} + bx^{2n} + e$ est un trinome.

On voit par ces definitions, ce que c' est qu' un sextinome, un septinome, un octinome, &c., ou en general un polynome de six, sept, huit, neuf &c. noms, ou termes.

VIII. Messieurs Leibnitz & Jean Bernoulli ont demontré dans les actes de Leipsik de 1702 & 1703, & dans les memoires de l'Academie des Sciences de Paris 1702, qu'en supposant la quadrature de l' hyperbole on peut toûjours integrer la fraction $\frac{x^{m}dx}{R}$, lorsque le denominateur R n' est autre chose que le produit des binomes simples $x + a$, $x + b$, &c. Et il n' est point difficile, en suivant les idées que ces deux grands mathematiciens nous ont données, & en supposant les quadratures du cercle & de l' hyperbole, de trouver l' integrale de la même fraction, lorsque le denominateur R peut etre resolu en binomes d' une ou de deux dimensions, comme $x^{2} + ax + b$, $x^{2} + c$, $x + e$, &c.

IX. Car que la plus grand exposant de x dans le denominateur

minateur R soit n; & si l' exposant m est egal a n, ou plus grand que n, qu' on divise x^m par R autant precisement qu' il est necessaire pour que l' exposant n soit plus grand que l' exposant de x dant ce qui reste de la division; & qu' on prenne l' integrale du quotient de cette division; ce qui poutra toûjours se faire. Il ne restera plus qu' a trouver l' integrale d' une fraction, comme $\frac{x^s\,dx}{R}$, dans la quelle l'exposant s sera moindre que n.

X. Or si le denominateur R de cette fraction peut se resoudre en binomes ou trinomes tous inegaux d' une ou de deux dimensions, comme $x+a$, $x+b$, x^2+c, x^2+ex+f, x^2+gx+h, &c.; qu' on suppose $\frac{x^s}{R}$ egale a la somme des fractions $\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}$ + &c. + $\frac{Dx+E}{x^2+c}+\frac{Fx+G}{x^2+ex+f}+\frac{Hx+x}{x^2+gx+h}$ + &c., c' est a dire, egale a la somme d' autant de fractions, qu' il ya de binomes & de trinomes composans le denominateur R. Qu' on reduise ensuite toutes ces fractions au denominateur commun R, & les ayant ajoutées ensemble, qu' on egale a zero chaque terme de cette somme, ou la puissance x^s ne se trouve point, & le terme ou elle se trouve, a la même puissance x^s; ce qui donnera autant d'equations, qu' il y a de constantes A, B, C, D, E, F, &c., par les quelles on determinera les valeurs de ces constantes. Et alors la fraction $\frac{x^s\,dx}{R}$ ainsi reduite se pourra toûjours integrer par les quadratures du cercle & de l' hyperbole, comme on le scait assés. Mais si dans

dans la determination des valeurs de A, B, C, D, &c. on trouve quelque contradiction ce sera une marque que les facteurs de R, qu'on a supposés tous inegaux, ne le sont pas; & pour lors on se servira de la maniere que nous allons expliquer.

XI. Si le denominateur R peut se resoudre en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions, en partie egaux, & en partie inegaux entr'eux, ou en leurs puissances dont les exposans soient des nombres entiers, comme si $R = S T^\lambda V^\mu$ &c., & que S, T, V, &c. soient des binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions, & λ, μ, &c. des nombres entiers positifs; on supposera $R = \frac{L}{S} + \frac{M}{T^\lambda} + \frac{N}{V^\mu}$ + &c., & on exprimera les quantités L, M, N, &c. par les constantes indeterminées A, B, C, D, E, &c. & par la variable x de telle sorte, que si $S = x + a$, L soit exprimée par A; si $S = x^2 + a$, ou $= x^2 + ax + b$, L soit exprimée par $Ax + B$; si $T^\lambda = (x^2 + cx + e)^2$, ou $= (x^2 + c)^2$, M soit exprimée par $Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$; si $T^\lambda = (x^2 + cx + e)^3$, ou $= (x^2 + c)^3$, M soit exprimée par $Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H$; & ainsi du reste. On reduira ensuite les fractions $\frac{S}{L} + \frac{M}{T^\lambda} + \frac{N}{V^\mu}$ + &c. au commun denominateur R, & en ayant fait la somme, on la supposera egale a $\frac{x^s}{R}$, en egalant a zero chacun des termes ou la puissance x^s ne se trouve point, & le terme, dans le quel elle se trouve, à x^s; ce qui donnera autant d'equations qu'il ya de constantes A, B, C, D, E, &c. à determiner.

 Exem-

Exemple. Soit $\frac{x^5}{R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{(x+a)\times(x^2+bx+c)}$

$$= \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c} = \frac{\begin{array}{l} +Ax^2+bAx+cA \\ +Bx^2+aBx+aC \\ +Cx \end{array}}{R}$$

on aura les trois equations $A+B=o$, $bA+aB+C=o$, & $cA+aC=1$. par les quelles on trouve $A = \frac{1}{aa+c-ab}$, $B = \frac{-1}{aa+c-ab}$, & $C = \frac{a-b}{aa+c-ab}$.

Si $aa+c-ab=o$, on auroit $x^2+bx+c=(x+a)\times(x+b-a)$, & par consequent $R = \frac{1}{(x+a)^2\times(x+b-a)}$.

C'est pourquoy il faudroit supposer $\frac{1}{R} = \frac{A}{x+b-a} + \frac{Bx+C}{(x+a)^2}$

$$= \frac{\begin{array}{llll} +Ax^2 & +2aAx & +a^2A \\ +B & +bB & +bC \\ & -aB & -aC \\ & +C & \end{array}}{R}$$

D'ou l'on tireroit les equations $A+B=o$, $2aA+bB-aB+C=o$, & $a^2A+bC-aC=1$, Les quelles donnent $A = \frac{1}{(2a-b)^2}$. $B = \frac{-1}{(2a-b)^2}$. & $C = \frac{b-3a}{(2a-b)^2}$.

Si dans ce dernier cas on avoit encore $2a-b=o$, $x+b-a$ seroit $=x+a$, & $R = (x+a)^3$.

XII. Il

XII. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que pour trouver l'integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{S T^\lambda V^\mu \&c.}$, c'eſt aſſez d'integrer les fractions $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, $\frac{x^s dx}{(x^2+a)^\delta}$, & $\frac{x^s dx}{(x^2+ax+b)^\delta}$, dans les quelles les expoſans s & δ ſont des nombres entiers poſitifs quelconques, ou zero, & a & b des quantités conſtantes, réelles, poſitives ou negatives. Or en faiſant $x+a=z$, la fraction $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, ſe change en celle-ci $\frac{(z-a)^s dz}{z^\delta}$, qu'on peut toûjours integrer en ſuppoſant la quadrature de l'hyperbole.

L'integration de $\frac{x^s dx}{(x^2+a)^\delta}$ depend de l'integration de $\frac{x^s dx}{x^2+a}$, comme Mr. Newton l'a demontré dans ſon traité de la quadrature des courbes prop. 7. Et l'integrale de $\frac{x^s dx}{x^2+a}$ ſe peut toûjours trouver, en ſuppoſant les quadratures du cercle & de l'hyperbole.

Enfin ſi l'on fait $x=z-\frac{1}{2}a$, la fraction $\frac{x^s dx}{[x^2+ax+b]^\delta}$ ſe change en celle-ci $\frac{[z-\frac{1}{2}a]^s dx}{[zz-\frac{1}{4}aa+b]^\delta}$, qu'on pourra integrer comme la precedente $\frac{x^s dx}{[x^2+a]^\delta}$.

 Donc

Donc, les quadratures du cercle & de l' hyperbole etant données, ou pourra toûjours trouver l' integrale de la differentielle $\frac{x^s dx}{S T^\lambda V^\mu \&c.}$.

XIII. Donc, les quadratures du cercle & de l' hyperbole etant données, on trouvera l' integrale de la differentielle $\frac{pdx}{q}$ proposée au commencement de ce memoire, pourvû qu' on puisse resoudre le polynome quelconque $a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} +$ &c. en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimensions. Car par cette resolution la differentielle $\frac{x^s dx}{R}$, d' ou depend l' integration de la proposée $\frac{pdx}{q}$ (6. 7.), aura la forme de la fraction $\frac{x^s\, dx}{S T^\lambda V^\mu \&c.}$

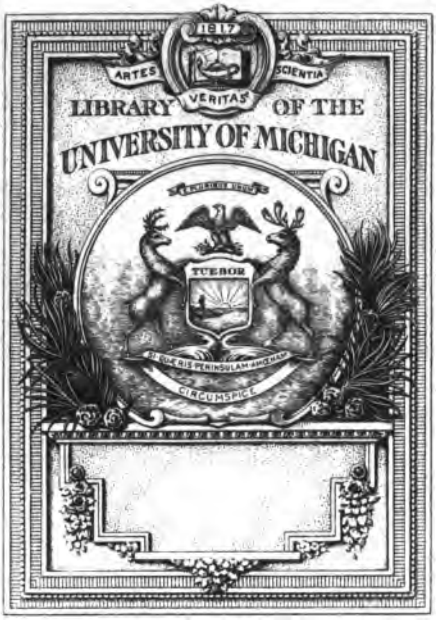
XIV. Or le celebre Mr. Gabriel Manfredi a donné dans les journaux de Venise, & dans le premier tome des Commentaires de l'Academie de l' Institut de Boulogne une methode generale pour resoudre le binome quelconque $x^n + b$ en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimensions. Il à aussi donné dans les mêmes ouvrages la methode pour resoudre le trinome $x^{2n} + max^n + a^{2n}$, dans le quel ma est une quantité quelconque constante & réelle, a^{2n} une quantité aussi quelconque constante, réelle & positive. D' ou il suit que le trinome quelconque $x^{2n} + bx^n + c$ peut toûjours être resolu en binomes & trinomes d'une ou de deux dimensions. Car si l' on fait $b = ma$, & $c = a^{2n}$; ce qui est toûjours possible, quand c est une quantité positive; le trinome proposé aura la même forme que celui de Mr. Manfredi.

Et si

Et si c est une quantité negative, en sorte que le trinome soit $x^{2n} + bx^{n} - c$; on le resoudra d'abord en deux binomes $x^{n} \frac{+ b + \sqrt{bb + 4c}}{2}$, & $x^{n} \frac{+ b - \sqrt{bb + 4c}}{2}$, qu'on divisera ensuite en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions.

Messieurs Jean Bernoulli & Jacques Herman ont aussi tres ingenieusement travaillé sur la resolution des trinomes & des quadrinomes dans les actes de Leipsik de 1719. & dans le VI. Tome des Commentaires de l'Academie de Petesbourg, a l'occasion d'une probleme proposé par Mr. Taylor a tous les geometres non Anglois; probleme qu'ils resolurent l'un & l'autre. On trouve encore la resolution generale des binomes, des trinomes, & des quadrinomes, avec beaucoup de beaux theoremes sur toute cette matiere, dans un ouvrage de Mr. de Moivre imprimé a Londres en 1730. sous le titre de *Miscellanea analytiea de seriebus & quadraturis*. Il y demontre entr'autres choses le fameux theorême, que Mr. Roger Cotes avoit donné sans demonstration dans son excellent ouvrage *de harmonia mensurarum* imprimé en 1722., pour trouver les facteurs du binome general par la division du cercle en parties egales.

XV. Les binomes, trinomes, & quadrinomes quelconques peuvent etre resolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions. On peut voire la demonstration de cette proposition, quant aux binomes & trinomes, dans les auteurs que je viens de citer. Celle de la resolution du quadrinome est fort aisée, la voici. Soit le quadrinome quelconque $x^{3n} + ax^{2n} + bx^{n} + c$. Qu'on fasse $x^{n} = z$; & qu'ensuite, ayant substitué z aulieu de x^{n}, on considere le quadrinome $z^{3} + az^{2} + bz + c$ comme egal a zero. On aura par


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
308
.L63

MEMOIRE

SUR

LE CALCUL INTEGRAL.

la quelle etant comparée termes a termes avec la formule generale $y^4 + gy^2 + by + k = o$, fournit ces quatre equations $g = aa$, $b = -6a^3$, $k = \frac{31}{4} a^4$, & $8r^3 - 4a^2r^2 - 62a^4r - 5a^6 = o$. Cette derniere equation est divisible par $2r + 5aa = o$, & le quotient est $4rr - 12a^2r - a^4 = o$. D'ou l'on tire $r = \frac{-5aa}{2}$, & $r = \frac{3a^2 + a^2\sqrt{10}}{2}$. En se servant de la premiere valeur de $r = \frac{-5aa}{2}$, on trouve $q = \frac{3a^4}{2}$, & $p = \frac{-2}{a}$. Et parceque q est positif, il faut substituer les valeurs trouvées dans nos deux derniers trinomes, qui se changent par la en ceux-ci.

$$y^2 + y\sqrt{2aa + aa\sqrt{10}} + \frac{3aa + aa\sqrt{10}}{2} + \frac{3aa}{\sqrt{2+\sqrt{10}}}.$$

$$y^2 - y\sqrt{2aa + aa\sqrt{10}} + \frac{3aa + aa\sqrt{10}}{2} - \frac{3aa}{\sqrt{2+\sqrt{10}}}.$$

XVII. Tout sextinome peut se resoudre en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions. Car le sextinome $x^{5n} + ax^{4n} + bx^{3n} + cx^{2n} + ex^n + f$ étant proposé, qu'on suppose $x^n = z$; & par la substitution on le changera en cette equation du cinquieme degré $z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + ez + f = o$, la quelle aura au moins une racine réelle, comme $z + b$, ou $x^n + b$, qu'on pourra toûjours trouver par l'analyse ou par la geometrie. Or si l'on divise le sexti-

ſextinome par le binome trouvé $x^n + b$, le quotient ſera un quinquinome. Donc puiſque le quinquinome [16] & le binome [15] peuvent toûjours être reſolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions, le ſextinome pourra toûjours être reſolu en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions.

XVIII. Les ſeptinomes & les octinomes peuvent toûjours être reſolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions. Car on voit aiſement qu'on peut par la ſubſtitution de z aulieu de x^n reduire le ſeptinome a une equation du ſixieme degré, & l'octinome a une equation du ſeptieme degré. Et puiſque les equations d'une nombre impair de dimenſions ont toûjours au moins une racine réelle, ſi l'on diviſe l'equation du ſeptieme degré par ſa racine réelle, on la reduira auſſi, comme le ſeptinome, a une equation du ſixieme degré. Il ſuffit donc de demontrer ici, que l'equation du ſixieme degré peut toûjours etre reſoluë en deux autres equations réelles, l'une de quatre, & l'autre de deux dimenſions.

Que cette equation du ſixieme degré, apres en avoir ôté le ſecond terme, ſoit

$$z^6 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

Et les deux equations, dont elle eſt le produit, ſoient

$$z^4 - mz^3 + nz^2 + pz + q = 0$$

$$z^2 + mz + r = 0$$

dont le produit eſt

$$\begin{array}{llllll} z^6 - mz^5 & + nz^4 & + pz^3 & + qz^2 & + mqz & + rq = 0 \\ + m & - mm & + mn & - mp & + rp & \\ & + r & - rm & + rn & & \end{array}$$

Maintenant pour determiner les quantites m, n, p, q, r, qu'on compare ce produit avec l'equation $z^6 + az^4 +$ &c.

en

en egalant tous le termes correſpondans ; & l'on aura par là cinq equations, ſcavoir, 1.^{ere} $r - mm + n = a$. 2.^{e} $p + mn - rm = b$. 3.^{e} $q + mp + rn = c$. 4.^{e} $mq + rp = d$. & 5.^{e} $rq = e$. On trouvera par la premiere $n = a + mm - r$; & ayant ſubſtitué cette valeur de n dans les autres equations, on trouvera par la ſeconde une valeur de p, la quelle etant ſubſtituée dans les equations ſuivantes, on trouvera par la troiſieme un valeur de q, qu' on ſubſtituerá de même dans la quatrieme & dans la cinquieme. On aura par là trois equations ſimples pour determiner les coëfficiens n, p, q; & la quatrieme & cinquieme equations ſeront

La 4.^{e} $cm - bm^2 + am^3 + m^5 - 4rm^3 - 2arm + 3rrm + rb = d$.

La 5.^{e} $cr - brm + arm^2 + rm^4 - 3r^2m^2 - ar^2 + r^3 = e$.

On trouve par la quatrieme equation $3rrm = d - cm + bm^2 - am^3 - m^5 + 4rm^3 + 2arm - rb$, & $rr = \frac{d - cm + bm^2 - am^3 - m^5 + 4rm^3 + 2arm - rb}{3m}$. En ſubſtituant ces valeurs, aulieu de $3rrm$ & de rr, dans la cinquieme equation, on aura pour determiner r l' equation ſimple

$$r = \frac{5m^8 + 6am^6 - 4bm^5 + 5cm^4 + a^2m^4 - 5dm^3 - b^2m^2 + acm^2 - 9em^2 - adm + cbm - db}{14m^6 + 8am^4 + 5bm^3 + 2aam^2 - 6cm^2 + abm - 3dm - bb}.$$

Enfin ſi l' on ſubſtituë cette valeur de r dans la quatrieme equation, on la changera en une equation de dixſept dimenſions, dans la quelle il n' y aura qu' une inconnue m; & l' on trouvera que les deux derniers termes de cette equation s' evanouiſſent, & qu' ainſi etant diviſée par mm, elle ſe reduira a une equation de quinze dimenſions $m^{15} + 4am^{13} - 2bm^{12}$ &c. $= 0$.

Or

Or cette equation êtant de dimenſions impaires, à toûjours aumoins une racine réelle, qui donnera une valeur réelle du coefficient m; & par la ſubſtitution de cette valeur de m dans les autres equations ſimples trouvées ci deſſus, on aura auſſi les valeurs réelles des autres quantités r, q, p, n. Donc l' equation $z^6 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = o$, ſera reſolue en deux autres equations réelles, l'une de deux, & l' autre de quatre dimenſions. Et ſi l' on remet dans ces deux equations la valeur de z, le ſeptinome propoſé ſera reſolu en un trinome & un quinquinome, les quels (15. 16.) pourront toûjours etre diviſés en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimenſions. On aura donc de cette maniere la reſolution du ſeptinome & de l' octinome, qu' on cherchoit.

XIX. Il ſuit de tout ceque nous avons etabli Juſqu' ici, que les quadratures du cercle & de l' hyperbole etant données, on peut toûjours trouver l' integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{R}$, lorſque le denominateur R eſt un binome, ou un trinome, ou un quadrinome, ou un quinquinome, ou un ſextinome, ou un ſeptinome, ou un octinome quelconques; ou le produit de ces polynomes multipliés enſemble, ou meme lors qu' il eſt compoſé des puiſſances de ces polynomes, dont les expoſans ſont des nombres entiers.

XX. Cette induction donne lieu de conjecturer avec beaucoup de vrayſemblance, que les quadratures du cercle & de l' hyperbole etant ſuppoſées, on peut toûjours trouver l' integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{R}$; & par conſequent que la fraction $\frac{pdx}{q}$, propoſée au commencement de ce memoire, peut toûjours s' integrer par la quadrature des ſections coniques [6. 7.] Mais comme le raiſonement fondé ſur cette in-

duction

duction n' eſt point demonſtratif, je vais propoſer quelques theoremes, qui pourront être utiles dans la recherche de la reſolution generale de tout polynome en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions, recherche penible a cauſe de la longueur des calculs, qu' elle demande.

XXI. On voit aiſement par la methode, dont nous nous ſommes ſervi Juſqu' ici, que ſi l'on peut demontrer que toute equation rationelle & réelle, c' eſt adire, dans la quelle tous les expoſans de l' inconnuë ſont des nombres entiers poſitifs, & les coëfficiens de chaque terme des grandeurs réelles, peut être reſolue en equations réelles d' une ou de deux dimenſions, tout polynome pourra auſſi être reſolu en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimenſions. Ainſi nous ne traiterons dans les theoremes ſuivans que de la reſolution des equations rationelles & réelles en equations réelles du premier ou du ſecond degré.

XXII. On ſcait auſſi par les regles de l' analyſe, que toute equation d' une degré impair, comme de 3, 5, 7, 9, 11 &c. dimenſions, a au moins une racine réelle, qu' on peut toûjours trouver où par le calcul, ou par quelque conſtruction geometrique; & qu' ainſi ce ſortes d' equations peuvent toujours être diviſées par cette racine réelle, & reduites par la aux equations qui ont un nombre pair de dimenſions. Il ne nous reſte donc qu' à conſiderer les equations paires, c' eſt adire de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 &c. dimenſions.

XXIII. C' eſt encore une regle tres connuë dans l' analyſe, qu' une equation quelconque à autant de racines & de dimenſions, qu' il y à de valeurs de l' inconnuë capables de ſatisfaire aux conditions de la queſtion ou du probleme, d'ou l' on à tiré cette equation.

XXIV. Enfin il eſt demontré dans la doctrine des combinaiſons, que ſi l'on à pluſieurs quantités a, b, c, d, e, f &c. à combiner enſemble, & que le nombre de ces quantités ſoit nommé u, & l'expoſant de la combinaiſon r, c' eſt a dire le

le nombre de ces quantités priſes enſemble dans chaque combinaiſon, ſoit appellé π, & le nombre des combinaiſons r; on aura $r = \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3 . \mu - 4 \ \&c.}{1 . 2 . \quad 3 . \quad 4 . \quad 5 .}$, de ſorte qu' il y aura autant de termes & dans le numerateur & dans le denominateur de cette fraction, qu' il ya d' unités dans l' expoſant π.

XXV. Ces lemmes etant ſuppoſés, je dis, que ſi on veut reſoudre une equation quelconque $z^{\mu} + az^{\mu - 1} + bz^{\mu - 2} + cz^{\mu - 3} + \&c. = o$ en deux autres equations quelconques

$$z^{\pi} + mz^{\pi - 1} + pz^{\pi - 2} + qz^{\pi - 3} + \&c. = o$$

$$z^{\mu - \pi} + rz^{\mu - \pi - 1} + sz^{\mu - \pi - 2} + tz^{\mu - \pi - 3} + \&c. = o$$

dans les quelles m, p, q, r, s, t, &c. ſont les coëfficiens indeterminés qu' on cherche; le produit de ces deux equations ſera

$$\begin{array}{llllll} z^{\mu} & + mz^{\mu - 1} & + pz^{\mu - 2} & + qz^{\mu - 3} & + \&c. & = o \\ & + r & + rm & + rp & & \\ & & + s & + sm & & \\ & & & + t & & \end{array}$$

& en comparant termes à termes ce produit avec l' equation propoſée, on aura les equations $m + r = a$. $p + rm + s = b$. $q + rp + sm + t = c$. &c. par les quelles on trouvera des equations ſimples pour detetminer les valeurs des coëfficiens r, s, p, q, t, &c., & le coëfficient m ſera determiné par une equation d' autant de dimenſions qu' il y à d'unités dans la quantité $\frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3 . \mu - 4 . \&c.}{1 . 2 . \quad 3 . \quad 4 . \quad 5 . \ \&c.}$; en ſorte que ſi l' equation par la quelle on determine le coëfficient

ficient m, eſt $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} + lm^{\nu-3} +$ &c. $= o$, on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3 \cdot \mu-4 \text{ \&c.}}{1 \cdot 2 \cdot \quad 3 \cdot \quad 4 \cdot \quad 5 \cdot \text{\&c.}}$.

Car l'equation $z^{\mu} + az^{\mu-1} + bz^{\mu-2} +$ &c. $= o$ à autant de racines, qu'il y a d'unités dans l'expoſant μ; & l'equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c. $= o$ à autant de racines, ou de dimenſions, qu'il y a de valeurs de m capables de ſatisfaire au cas propoſé (23.), ou qu'il y à d'unités dans l'expoſant ν. Or ſi on deſigne par c, d, e, f, &c. les racines de l'equation $z^{\mu} + az^{\mu-1} + bz^{\mu-2} +$ &c. $= o$; & ſi dans l'equation $z^{\pi} + mz^{\pi-1} + pz^{\pi-2} +$ &c. $= o$ l'expoſant $\pi = 2$, alors puiſque l'equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c. $= o$, par la quelle le coëfficient m eſt determiné, doit ſatisfaire a toutes les combinaiſons de racines c, d, e, f, g, &c. priſes deux par deux pour en former des equations du ſecond degré, il y aura dans cette dernier equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c $= o$ autant de valeurs de m, qu'il y a de combinaiſons des quantités c, d, e, f, g, &c. priſes deux par deux; & par conſequent le nombre des valeurs de m, ou des racines, & des dimenſions de cette equation ſera $\frac{\mu \cdot \mu-1}{1 \cdot 2 \cdot} = \nu$ (24.)

On demontrera de même, que ſi $\pi = 3$, on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2}{1 \cdot 2 \cdot \quad 3 \cdot}$; ſi $\pi = 4$ on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu-1 \cdot \mu-2 \cdot \mu-3}{1 \cdot 2 \cdot \quad 3 \cdot \quad 4 \cdot}$ & ainſi de ſuite. On aura donc generalement $\nu = \frac{\mu \cdot \mu-1}{1 \cdot 2 \cdot} \cdot \frac{\mu-2 \cdot \mu-3 \cdot \mu-4 \cdot \text{\&c.}}{3 \cdot \quad 4 \cdot \quad 5 \cdot \text{\&c.}}$

XXVI.

XXVI. Si les equations de huit dimensions peuvent se resoudre en equations réelles d' une ou de deux dimensions, toutes les equations de 9, 10, 11, 12, 13, 14, & 15, dimensions pourront aussi être resolues en equations d' une ou de deux dimensions. Il suffit de demontrer cette proposition pour les equations de 10, 12, & 14 dimensions (22.) Or

I. Si l' on suppose $\mu = 10$, & $\varpi = 2$; on aura $\nu = \frac{10.9}{1.2}$ $= 45.$ (25); & l'equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c. $= 0$ sera d' un degré impair, & par consequent elle aura au moins une racine réelle (22), & l'equation $z^{\varpi} + mz^{\varpi-1} + pz^{\varpi-2} +$ &c. $= 0$ sera changée en une equation réelle du second degré, sçavoir, $z^2 + mz + p = 0$, [25], par la quelle l' equation $z^{10} + az^9 + bz^8 +$ &c. $= 0$ pourra être divisée, & reduite ainsi a une equation de huit dimensions. Donc on pourra la resoudre en deux equations, l' une de huit, & l'autre de deux dimensions.

II. Si l' on suppose $\mu = 12$, & $\varpi = 4$; on aura $\nu = \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495$, nombre impair. Donc l' equation de 12 dimensions pourra toûjours être divisée par une equation réelle de 4 dimensions, & reduite par là a une equation de huit dimensions. Ainsi elle pourra toûjours être resolue en deux equations réelles, l' une de huit, & l' autre de 4 dimensions.

III. Si l' on suppose $\mu = 14$, & $\varpi = 2$; on aura $\nu = \frac{14.13}{1.2.} = 91$ nombre impair. Par où l' on voit que l'equation de 14 dimensions peut toûjours être resolue en deux equations réelles, l' une de deux, & l' autre de 12 dimensions; & par le cas precedent l' equation de 12 dimensions

D peut

peut toûjours être resolue en equations de huit, & de quatre dimensions. Donc l'equation de 14 dimensions peut toûjours être resolue en equations de 8, de 4 & de deux dimensions.

Donc les equations de 10, 12, & 14 dimensions peuvent toûjours être resolues en equations de huit, de 4 ou de deux dimensions; & ainsi puisque les equations de 4 dimensions peuvent se resoudre en equations réelles de deux dimensions [16], si les equations de huit dimensions peuvent aussi se resoudre de la même maniere, les equations de 10, 12, & 14 dimensions pourront toûjours être resolues en equations réelles d'une ou de deux dimensions.

XXVII. Si les equations du 8.e & du 16.e degré peuvent se resoudre en equations réelles du 1.er ou du 2.e degré, on pourra aussi resoudre de même les equations depuis le 16.e degré jusqu'au 31 inclusivement. Il suffit (22) de demontrer ce theoreme pour les equations des degrés pairs 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.

Or si $\mu = 18$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{18.\ 17}{1.\ 2} = 9.\ 17$, nombre impair.

Si $\mu = 20$, & $\pi = 4$; on aura $\nu = \frac{20.\ 19.\ 18.\ 17}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 5.\ 19.\ 3.\ 17.$ nombre impair.

Si $\mu = 22$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{22.\ 21.}{1.\ 2} = 11.\ 21.$ nombre impair.

Si $\mu = 24$, & $\pi = 8$; on aura $\nu = \frac{24.23.22.21.20.19.18.17}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8} = 3.\ 23.\ 11.\ 19.\ 3.\ 17.$ nombre impair.

Si $\mu = 26$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{26.\ 25}{1.\ 2} = 13.\ 25.$ nombre impair.

Si $\mu = 28$, & $\pi = 4$; on aura $\nu = \frac{28.27.26.25}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 7.$ 9. 13. 25. nombre impair.

Enfin si $\mu = 30$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{30.29}{1.\ 2} = 15.$ 29. nombre impair.

On demontrera aisément le theoreme proposé par cequi vient d'être etabli, en raisonnant comme dans la demonstration du theoreme precedent (26).

XXVIII. Si on peut resoudre les equations de 8, 16, & 32 dimensions en equations réelles du premier ou du second degré; on pourra aussi resoudre de même les equations depuis le 32.^{e} degré jusqu'au 63.^{e} inclusivement. Ce theoreme se demontre comme les deux precedens, en faisant seulement attention, qu' il faut egaler π a la plus haute puissance de 2, par la quelle μ puisse être divisé sans reste. Par exemple dans les cas de $\mu = 40$, & de $\mu = 56$, il faut supposer $\pi = 8$; & dans le cas de $\mu = 48$, il faut supposer $\pi = 16$.

XXIX. Et generalement, si les equations des degrez 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. &c. peuvent se resoudre en equations réelles du premier, ou du second degré, toutes les autres equations pourront aussi se resoudre en equations réelles d'une ou de deux dimensions. Il suffit pour demontrer cette proposition generale de faire voir, que la quantité $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4.\&c.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \&c.}$ ou la quantité $\frac{\mu}{\pi} \times \frac{\mu-1}{\pi-1} \times \frac{\mu-2}{\pi-2} \times \frac{\mu-3}{\pi-3} \times \frac{\mu-4}{\pi-4}$ &c., dans la quelle π exprime le plus grand des facteurs 1. 2. 3. 4. 5. &c. est un nombre entier & impair, lorsque π etant une puissance de

 2, ou

2, ou un terme de la progreſſion 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. $\frac{\mu}{\pi}$ eſt un nombre impair. Or

I. Il eſt evident que la quantité $\frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3 . \mu - 4 . \&c.}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . \&c.}$ eſt un des coëfficiens numeraires des termes d' un binome, comme $a + b$, elevé a la puiſſance μ; car $(a+b)^{\mu}$ $= a^{\mu} + \frac{\mu}{1} a^{\mu - 1} b + \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} a^{\mu - 2} b^2 + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} a^{\mu - 3} b^3 + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3}{1 . 2 . 3 . 4} a^{\mu - 4} b^4 + \&c.$ Mais lorſque μ eſt un nombre entier, tous ces coëfficiens ſont auſſi des nombres entiers. Donc la quantité $\frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3 . \mu - 4 \ \&c.}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ \&c.}$, dans la quelle on ſuppoſe que μ eſt un nombre entier, eſt toûjours un nombre entier.

II. Si l' on ſuppoſe que π eſt une puiſſance de 2, dont l' expoſant ſoit un nombre entier r, & que $\frac{\mu}{\pi}$ ou $\frac{\mu}{2^r}$ ſoit un nombre impair quelconque; on pourra exprimer ce nombre impair par $2n+1$, en ſuppoſant que n eſt un nombre entier quelconque, ou zero. On aura donc $\frac{\mu}{\pi} = \frac{\mu}{2^r} = 2n + 1$, & par conſequent $\mu = 2^{r+1} n + 2^r$; & en ſubſtituant ces valeurs de π & de μ dans la quantité $\frac{\mu}{\pi} \times \frac{\mu - 1}{\pi - 1} \times \frac{\mu - 2}{\pi - 2} \times \frac{\mu - 3}{\pi - 3}$

$\frac{\mu-3}{\varpi-3}$, &c. on la changera en celle ci $\frac{2^{r+1}n+2^r}{2^r}\times$

$$\frac{2^{r+1}n+2^r-1}{2^r-1}\times\frac{2^{r+1}n+2^r-2}{2^r-2}\times\frac{2^{r+1}n+2^r-3}{2^r-3}$$

$$\times\ \&c. = \frac{2n+1}{1}\times\frac{2^{r+1}n+2^r-1}{2^r-1}\times\frac{2^r n+2^{r-1}-1}{2^{r-1}-1}\times$$

$$\frac{2^{r+1}n+2^r-3}{2^r-3}\times\frac{2^{r-1}n+2^{r-2}-1}{2^{r-2}-1}\times\ \&c.$$

Or tous les numerateurs, & tous les denominateurs de ces fractions ſont des nombres impairs; & par conſequent le produit de tous ces numerateurs & le produit de tous ces denominateurs ſont auſſi des nombres impairs; d'ou il ſuit, que le quotient de la diviſion du produit des numerateurs par le produit des denominateurs eſt un nombre impair. Donc la quantité $\frac{\mu\,.\,\mu-1\,.\,\mu-2\,.\,\mu-3\,.\,\mu-4\,.\,\&c.}{\varpi\,.\,\varpi-1\,.\,\varpi-2\,.\,\varpi-3\,.\,\varpi-4\,.\,\&c.}$ dans les ſuppoſitions que nous avons faites, eſt un nombre entier & impair.

XXX. Il ſuit de la, que ſi l'on peut reſoudre les polynomes de 5 . 9 . 17 . 33 . 65 . 129 . &c. noms ou termes en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions; on pourra reſoudre de même tous les autres polynomes. Car il eſt tres facile de demontrer que les polynomes, dont les nombres de termes, ou noms, ſont 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . &c., ſe reduiſent aux equations, dont les dimenſions reſpectives ſont 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c. [15. 16. 17. 18. 21.]

XXXI. Si les equations, aux quelles on a reduit les polynomes, ont quelque racine réelle; on pourra toûjours la trouver par l'analyſe, ou au moins par quelque conſtruction geo-

geometrique. Par consequent si une equation du 8.^{e} degré a quelques racines réelles, on pourra toûjours la resoudre en equations réelles du 1.^{e} ou du 2.^{e} degré; si une equation de 16 dimensions a quelques racines réelles, on pourra toûjours la resoudre au moins en une equation du 8.^{e} degré & en d'autres equations du 1.^{e} ou du 2.^{e} degré; de même si une equation du 32.^{e} degré a quelques racines réelles, on pourra la resoudre en equations du 16.^{e}, 8.^{e} & 1.^{e} ou 2.^{e} degrés; & ainsi des autres. Cela se comprend aisement par ce qui a eté demontré ci dessus.

XXXII. Si une equation du 8.^{e} degré n'a point de racines réelles, & qu'on veuille la resoudre par la methode de l'article 25. en equations réelles du premier ou du second degré; en faisant $r = 2$, on aura $v = \frac{8.7}{1.2} = 28$. C'est pourquoy l'equation par la quelle on determinera le coëfficient m, sera de 28 dimensions; & si cette equation du 28 degré a quelques racines réelles (comme il y a lieu de croire qu'elle en aura toûjours Art. 19. 20.); on pourra resoudre l'equation du 8.^{e} degré en equations réelles du 1.^{e} ou du 2.^{e} degré. On pourroit aussi supposer $r = 4$; & dans ce cas on trouveroit $v = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$. Mais si la supposition de $r = 2$ ne donne rien, celle de $r = 4$ ne donnera rien non plus; ainsi elle est inutile.

XXXIII. De même si une equation du 16.^{e} degré n'a point de racines réelles, & qu'on veuille la resoudre par la methode de l'article 25 en equations réelles du 1.^{e} ou 2.^{e} degré; en faisant $r = 2$, on aura $v = \frac{16.15}{1.2} = 120$. Ainsi elle dependra d'une equation de 120 dimensions, par la quelle le coëfficient m sera determiné. Si on suppose $r = 6$, ou aussi $r = 8$, ou si $r = 8$, on aura $v = 12870$. Mais ces dernieres suppositions sont inutiles.

On

On voit bien qu' on peut continuer ces theoremes, ou corrollaires, tant qu' on voudra.

XXXIV. Toute equation, dans la quelle le premier & le dernier termes ont des signes contraires, a quelque racine réelle. Car soit l' equation quelconque

$$x^{\mu} + ax^{\mu - 1} + bx^{\mu - 2} \ldots\ldots + sx - t = o$$

dans la quelle μ est un nombre entier positif, $+ x^{\mu}$ le premier terme positif, & $- t$ le dernier terme negatif. Qu'on suppose $xy = t$, ce qui est une equation a une hyperbole entre les asymptotes, dont les coordonnées sont x & y; & l'on aura $x^{\mu} + ax^{\mu - 1} + bx^{\mu - 2} \ldots\ldots + sx = xy$, & divisant par x, on aura $x^{\mu - 1} + ax^{\mu - 2} + bx^{\mu - 3} \ldots\ldots + s = y$, equation a une courbe parabolique, dans la quelle si l' on suppose $x = o$, on aura $y = s$; & $y = o$, si $s = o$. Mais si l'on suppose que x devienne infinie, on aura $x^{\mu - 1} = y$, c' est a dire que y deviendra aussi infinie. Donc si l'on combine ensemble ce deux courbes; en sorte que les abscisses x leurs soient communes, la parabole coupera necessairement l' hyperbole; puisque l' ordonnée y s' evanouit dans l' hyperbole, lorsque l' abscisse x devient infinie, & qu', au contraire l' ordonnée y devient infinie dans la parabole, lorsque l' abscisse x devient infinie, & que l' abscisse x s' evanouissant, l'ordonnée y devient infinie dans l' hyperbole, & s' evanouit ou est finie dans la parabole. Donc ces deux courbes ainsi combinées auront au moins une ordonnée commune, qui passera par le point de leur intersection, & l' abscisse correspondante a cette ordonnée sera une valeur réelle de x, qui satisfera a l' equation proposée $x^{\mu} + ax^{\mu - 1} + bx^{\mu - 2} \ldots\ldots + sx - t = o$. Donc cette equation aura au moins une racine réelle.

XXXV. Et par ce qu' une equation d' un nombre pair de dimensions ne peut avoir moins de deux racines réelles, si elles

si elles ne sont pas toutes imaginaires ; il suit de ce que nous venons de demontrer, que les equations paires, dont le premier & le dernier termes ont des signes contraires ; ont toûjours au moins deux racines réelles.

XXXVI. Donc une equation quelconque de 8 dimensions, dont le premier & le dernier termes ont des signes contraires, peut toûjours être resolue en equations réelles d'une ou de deux dimensions [31]. D'ou il suit encore, qu'un polynome de neuf noms ou termes (qui peut toûjours se reduire a une equation de 8 dimensions) dans lequel le premier & le dernier termes ont des signes contraires, pourra toûjours être resolu en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions.

XXXVII. De même une equation de 16 dimensions, dont le premier & le dernier termes ont des signes contraires, peut toûjours se resoudre en une equation de huit dimensions, & en d'autres equations d'une ou de deux dimensions [31]. Une equation de 32 dimensions, dont le premier & le dernier termes ont de signes contraires, peut toûjours se resoudre en une equation de 16 dimensions, & en d'autres equations du 8.^{e} & du 1.^{e} ou 2.^{e} degrés [31]. Et ainsi des autres.

XXXVIII. Si une equation de 8 dimensions n'a aucunes racines réelles, & qu'on la divise par une equation de deux dimensions, dans la quelle on employe des coëfficiens indeterminés, qui se trouvent ensuite determinés par une equation, dont le premier & le dernier termes ayent des signes contraires ; l'equation de huit dimensions pourra se resoudre en equations réelles d'une ou de deux dimensions [32]. De même si une equation de 16 dimensions n'a aucunes racines reelles, & qu'on la divise par une equation du second degré, dans la quelle on employe des coëfficiens indeterminés, qui se trouvent ensuite determinés par une equation, dont le premier & le dernier termes ont de signes contraires ; cette equation de 16 dimensions pourra être resolue

ſolue en équations de huit & de deux dimenſions [33]. Et ainſi du reſte.

XXXIX. L' equation generale paire $x^{2\mu} + bx^{2\mu-1} + kx^{2\mu-2} + lx^{2\mu-3} + px^{2\mu-4} + qx^{2\mu-5} + rx^{2\mu-6} + sx^{2\mu-7} + tx^{2\mu-8} +$ &c. $= o$ eſt exactement diviſible par l' equation du ſecond degré $x^2 - m = o$, ſi l' on a ces deux egalités

1.° $bm^{\mu-2} + lm^{\mu-2} + qm^{\mu-3} + sm^{\mu-4} +$ &c. $= o$.

2.° $m^{\mu} + km^{\mu-1} + pm^{\mu-2} + rm^{\mu-3} + tm^{\mu-4} +$ &c. $= o$.

Et le quotient ſera $x^{2\mu-2} + bx^{2\mu-3}$

$$\begin{array}{llllll} +kx^{2\mu-4} & +lx^{2\mu-5} & +px^{2\mu-6} & +qx^{2\mu-7} & +rx^{2\mu-8} & + \&c. = o \\ +m & +bm & +km & +lm & +pm & \\ & & +mm & +bmm & +kmm & \\ & & & & +m^3 & \end{array}$$

Car ſi on ſuppoſe $\mu = 2$, & $2\mu = 4$, l'equation generale, en faiſant q, r, s, t, &c. egaux chacun a zero, ſe change en celle ci $x^4 + bx^3 + kx^2 + lx + p = o$, la quelle etant diviſée par $x^2 - m = o$, donne pour quotient $x^2 + bx + k + m = o$, & pour reſtes de la diviſion $lx + bmx$, & $p + km + mm$. Donc ſi l' on a ces deux egalités $l + bm = o$, & $p + km + m^2 = o$, la diviſion ſe ſera exactement.

Si on ſuppoſe $\mu = 3$, & $2\mu = 6$, les reſtes de la diviſion feront $bm^2x + lmx + qx$; & $m^3 + km^2 + pm + r$. Donc ſi l' on a les deux egalités $bm^2 + lm + q = o$, & $m^3 + km^2 + pm + r = o$, la diviſion ſe fera ſans reſte.

Si on ſuppoſe $\mu = 4$, & $2\mu = 8$, les reſtes de la diviſion

feront $bm^3x + lm^2x + qmx + sx$, & $m^4 + km^3 + pm^2 + rm + t$. Donc en fuppofant ces deux quantités egales chacune a zero, la divifion fe fera fans refte.

Par ou l' on voit, qu' en fuppofant generalement $bm^{\mu-1} + lm^{\mu-2} + qm^{\mu-3} + sm^{\mu-4} + \&c. = 0$, & $m^{\mu} + km^{\mu-1} + pm^{\mu-2} + rm^{\mu-3} + sm^{\mu-4} + \&c. = 0$, l'equation generale fera exactement divifible par $x^2 - m$.

XL. Soit propofée l' equation generale de 4 dimenfions, dont on a oté le fecond terme, & qu' on fuppofe n' avoir aucunes racines réelles,

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Qu' on faffe $x = z + y$, en fuppofant que z eft une variable, & y une conftante indeterminée; & ayant fubftitué $z + y$ aulieu de x, on aura cette equation

$$\begin{array}{lllll} z^4 + 4yz^3 & + 6y^2z^2 & + 4y^3z & + y^4 & \\ & + a & + 2ay & + ayy & = 0. \\ & & + b & + by & \\ & & & + c & \end{array}$$

Pour trouver le divifeur $z^2 - m = 0$ de cette equation, il faut refoudre les deux egalités ou equations $l + bm = 0$, & $p + km + m^2 = 0$, dans les quelles b, k, l, p reprefentent les coëfficiens refpectifs des termes de l' equation $z^4 + 4yz^3 + \&c. = 0$, c' eft adire, que $b = 4y$, $k = 6y^2 + a$, &c. Or par la premiere de ces deux equations on trouve $m = \frac{-l}{b}$; & fubftituant cette valeur de m dans l'autre equation, on a $pb^2 - klb + ll = 0$, la quelle par la fubftitution des valeurs de b, k, l, & p, fe change en cette equation du fixieme degré

$64y^6$

$$\begin{array}{l} 64y^6 + 32y^4 - 16cy^2 - bb = 0, \\ \qquad\quad + 4aay^2 \end{array}$$

dans la quelle le premier & le dernier termes ont des signes contraires. Cette equation a donc au moins deux racines réelles (35), les quelles étant substituées dans l'equation $m = \frac{-l}{b} = \frac{-4y^3 - 2ay - b}{4y}$, donneront deux valeurs réeles de m; & par consequent on connoitra le diviseur $z^2 - m$. On a donc encore par la une autre methode pour resoudre les equations de quatre dimensions en d'autres equations réelles de deux dimensions; & l'on peut appliquer cette methode aux equations superieurs.

XLI. Soit l'equation generale de huit dimensions, dont on a oté le second terme

$$x^8 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = 0.$$

Ayant fait $x = z + y$, & substitué cette valeur de x dans l'equation proposée, on aura

$$\begin{array}{lllllllll} z^8 & +8yz^7 & & & & & & & \\ & & +28y^2z^6 & +56y^3z^5 & +70y^4z^4 & +56y^5z^3 & +28y^6z^2 & +8y^7z & +y^8 \\ & & +a & +6ay & +15ay^2 & +20ay^3 & +15ay^4 & +6ay^5 & +ay^6 \\ & & & +b & +5by & +10by^2 & +10by^3 & +5by^4 & +by^5 \;=0 \\ & & & & +c & +4cy & +6cy^2 & +4cy^3 & +cy^4 \\ & & & & & +d & +3dy & +3dy^2 & +dy^3 \\ & & & & & & +e & +2ey & +ey^2 \\ & & & & & & & +f & +fy \\ & & & & & & & & +g \end{array}$$

Pour trouver le diviseur $z^2 - m$ de cette equation, il faut

 resou-

resoudre (39) ces deux equations, la 1.e $bm^3 + lm^2 + qm + s = o$, & la 2.e $m^4 + km^3 + pm^2 + rm + t = o$, dans les quelles b, k, l, p, q, r, s, t representent les coëfficiens respectifs $8y$. $28y^2 + a$, $56y^3 + 6ay + b$, &c.

La premiere equation donne $m^3 = \frac{-lm^2 - qm - s}{b}$; & en substituant cette valeur de m^3 dans la seconde equation, on a

$$\begin{array}{llll} l^2m^2 & + lqm & + ls & \\ + b^2p & + b^2r & + b^2t & = o. \\ - bq & - bs & - bks & \\ - bkl & - bkq & & \end{array}$$

Pour abreger le calcul, je suppose $l^2 + b^2p - bq - bkl = \pi$, $lq + b^2r - bs - bkq = \tau$, & $ls + b^2t - bks = \nu$; ce qui change la derniere equation en celleci $\pi m^2 + \tau m + \nu = o$, par la quelle on a $m^2 = \frac{-\tau m - \nu}{\pi}$. En substituant cette valeur de m^2 dans la 1.e equation, on trouve $-b\pi\nu m + b\tau^2 m - \pi l\tau m + \pi^2 qm + b\tau\nu - \pi l\nu + \pi^2 s = o$, & par consequent $m = \frac{\pi l\nu - b\tau\nu - \pi^2 s}{b\tau^2 + \pi^2 q - b\pi\nu - \pi l\tau} = \frac{\lambda}{\delta}$, en supposant λ egale au numerateur & δ egale au denominateur. Si l'on substitue cette valeur de m dans l'equation $\pi m^2 + \tau m + \nu = o$, on aura $\pi\lambda\lambda + \delta\tau\lambda + \delta\delta\nu = o$; & si aulieu de λ & δ on remet leurs valeurs dans cette derniere equation, elle deviendra en l'ordonnant par rapport à π

$ss\pi^3$

$$\begin{aligned} & ss\varpi^3 - 2sl\nu\varpi^2 + 3bs\tau\nu\varpi + b^2\nu^3 \\ & + q^2\nu + l^2\nu^2 - bs\varpi^3 \\ & - qs\varpi - 2bq\nu^2 - bl\tau\nu^2 \\ & - lq\tau\nu + bq\tau^2\nu \\ & + ls\tau^2 \end{aligned} = 0$$

Si au lieu de ϖ, τ, ν on ecrit leurs valeurs dans cette equation, & qu' on l' ordonne par rapport a b, on trouvera que les quatre derniers termes s' evanouiront, & que par consequent si on vouloit remetre dans cette equation les valeurs de b, k, l, p, q, r, s, t, elle deviendroit un equation du 28.^{e} degré. Je n' ay pas achevé ce calcul a cause de sa longueur, & du peu de tems que je peux donner a cette sorte d' occupations. Mais si en l' achevant ou trouvoit le premier & le dernier termes de l' equation du 28.^{e} degré avec des signes contraires, on seroit assuré de la resolution de l' equation proposée du huitieme degré en equations réelles du second degré.

XLII. Voici encore une methode bien generale pour resoudre les equations paires en equations réelles de deux dimensions. Soit proposée l' equation generale paire

$$x^{2\mu} + ax^{2\mu-1} + bx^{2\mu-2} + cx^{2\mu-3} + \&c. = 0.$$

Supposant que z soit une variable & y une constante indeterminée, qu' on fasse $x = z + y$; & que l' equation proposée par la substitution de $z + y$ aulieu de x se change en celle-ci

$$z^{2\mu} + bx^{2\mu-1} + kz^{2\mu-2} + lz^{2\mu-3} + pz^{2\mu-4} + \&c. = 0$$

Dans la quelle les coëfficiens b, k, l, p, q, &c. seront composés de constantes determinées a, b, c, &c. & de la constante indeterminée y. Aulieu de diviser cette equation par le binome $z^2 - m$, qu' on la divise par le trinome $z^2 - nz - m$

$nz - m$, dans le quel n & m sont aussi deux constantes indeterminées; & on trouvera, comme ci dessus [39], que pour faire cette division sans reste, il faudra resoudre deux equations, qui contiendront les trois indeterminées y, n & m. En combinant ces deux equations par les methodes ordinaires, on pourra toûjours les changer en deux autres, dont l'une sera une equation simple, qui donnera la valeur d'une inconnuë, comme de m, par les deux autres inconnues y & n combinées entr'elles & avec les quantités connuës; & l'autre equation ne contiendra plus que ces deux inconnuës y & n, dont par consequent on pourra prendre l'une a discretion. C'est pourquoy si l'on peut trouver une valeur réele de y ou de n, la quelle etant substituée dans cette equation donne une valeur réelle de l'autre inconnuë, ayant remis ces valeurs au lieu de y & de n dans l'equation simple, par la quelle m est determinée, on aura aussi une valeur réelle de m; & par consequent le trinome $z^2 - nz - m$, par le quel on pourra exactement diviser l'equation proposée, sera connu.

Or l'equation dans la quelle il n'y a que les deux inconnuës y & n, est un lieu a une courbe geometrique, dont les coordonnées sont y & n. Si donc on decrit cette courbe, on aura un infinité de valeurs réelles de y & de n, les quelles etant substituées dans l'equation simple, qu'on a trouvée pour determiner m, donneront aussi la valeur réelle de m.

On peut encore, sans decrire cette courbe, former arbitrairement une nouvelle equation, qui contienne les deux inconnuës y & n, ou l'une des deux seulement; pourvû que cette equation soit telle, qu'en la combinant avec l'autre equation, qui contient les deux mêmes inconnuës, on trouve des valeurs réelles de ces inconnuës. Ce qui donne beaucoup de moyens pour trouver les diviseurs des equations de 8, 16, 32, &c. dimensions. Mais comme cette recherche demande de tres longs calculs, je la remets a un autre tems.

XLIII. Je

XLIII. Je reviens presentement a la fraction $\frac{x^5 dx}{R}$, a la quelle se reduit la proposée $\frac{pdx}{q}$. Il est evident par cequi a eté demontré jusqu'ici, que pour trouver l'integrale de cette fraction, il faut faire trois operations; la premiere, pour resoudre les polynomes, dont le denominateur R est composé, en binomes & trinomes d'une ou de deux dimensions; la seconde, pour separer ces binomes & trinomes & leurs puissances; & la troisieme, pour integrer les fractions qui naissent de ces operations, & dans les quelles les denominateurs sont des binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions, ou leurs puissances dont les exposants sont des nombres entiers. Or pour abbreger le travail & le tems, que demandent ces operations, on pourroit construire trois tables, la premiere pour la resolution des polynomes, la seconde pour la separation des binomes & trinomes, & la troisieme pour l'integration des fractions que donne cette separation.

XLIV. Voici une commencement de la premiere table.

Pour resoudre le binome $x^n + b$

Qu'on fasse $b = + a^n$, & ensuite $b = - a^n$, & successivement $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, &c.

$$x^3 + a^3 \left\{ \begin{array}{l} x + a \\ x^2 - ax + aa \end{array} \right.$$

$$x^4 + a^4 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + ax\sqrt{2} + aa \\ x^2 - ax\sqrt{2} + aa \end{array} \right.$$

$$x^5 + a^5 \left\{ \begin{array}{l} x + a \\ x^2 \dfrac{-ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa \\ x^2 \dfrac{-ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa \end{array} \right.$$

$$x^6 + a^6 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + aa \\ x^2 + ax\sqrt{3} + aa \\ x^2 - ax\sqrt{3} + aa \end{array} \right.$$

$$x^7 + a^7 \left\{ \begin{array}{l} x + a \\ x^2 + mx + aa \\ m^3 + am^2 - 2a^2m - a^3 = 0 \end{array} \right.$$

, equation irreductible.

$$x^8 + a^8 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x\sqrt{2aa + aa\sqrt{2}} + aa \\ x^2 + x\sqrt{2aa - aa\sqrt{2}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2aa + aa\sqrt{2}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2aa - aa\sqrt{2}} + aa \end{array} \right.$$

&c.

$$x^3 - a^3 \left\{ \begin{array}{l} x - a \\ x^2 + ax + aa \end{array} \right.$$

$$x^4 - a^4 \left\{ \begin{array}{l} x + a \\ x - a \\ x^2 + aa \end{array} \right.$$

x^5

$$x^5 - a^5 \begin{cases} x - a \\ x^2 \dfrac{+ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa \\ x^2 \dfrac{+ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa \end{cases}$$

$$x^6 - a^6 \begin{cases} x + a \\ x - a \\ x^2 - ax + aa \\ x^2 + ax + aa \end{cases}$$

$$x^7 - a^7 \begin{cases} x - a \\ x^2 + mx + aa \\ m^3 - am^2 - 2a^2m + a^3 = 0. \end{cases}$$

$$x^8 - a^8 \begin{cases} x + a \\ x - a \\ x^2 + aa \\ x^2 + ax\sqrt{2} + aa \\ x^2 - ax\sqrt{2} + aa \end{cases}$$

&c. &c.

Pour resoudre le trinome $x^{2n} + bx^n \mp c$

Il faut distinguer deux cas, le premier pour $-c$, & le second pour $+c$. Dans le premier cas je fais $a^n = \frac{\sqrt{bb+4c}+b}{2}$

& $e^n = \frac{\sqrt{bb + 4c} - b}{2}$; & le trinome $x^{2n} + bx^n - c$, se resout dabord en deux binomes $x^n + e^n$, & $x^n - e^n$ les quels se resoudront ensuite par la premiere partie de cette table en binomes & trinomes d' une ou de deux dimensions.

Dans le second cas, l' on a ou $\frac{1}{4} bb = c$, ou $\frac{1}{4} bb > c$, ou enfin $\frac{1}{4} bb < c$. Lorsque $\frac{1}{4} bb = c$, le trinome est un quarré $x^{2n} + bx^n + \frac{1}{4} bb$, qu' on resout dabord en deux binomes egaux $x^n + \frac{1}{2} b$, & $x^n + \frac{1}{2} b$. De même lorsque $\frac{1}{4} bb > c$, le trinome $x^{2n} + bx^n + c$ se resout dabord en deux binomes $x^n + \frac{b + \sqrt{bb - 4c}}{2}$ & $x^n + \frac{b - \sqrt{bb - 4c}}{2}$.
Et ensuite ces binomes se pourront resoudre par la premiere partie de cette table en binomes & trinomes d' une ou de deux dimensions. Mais quand $\frac{1}{4} bb < c$, la quantité $\sqrt{bb - 4c}$ est imaginaire; & pour lors on pourra se servir de la methode de Mr. Gabriel Manfredi, par la quelle, en supposant $c = a^{2n}$, on trouvera

$$x^4 + bx^2 + c \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x\sqrt{2aa - b} + aa \\ x^2 + x\sqrt{2aa - b} + aa \end{array} \right.$$

$$x^6 + bx^3 + c \left\{ \begin{array}{l} x^2 + mx + aa \\ m^3 - 3aam - b = 0 \end{array} \right.$$

x⁸

$$x^8 + bx^4 + c \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x\sqrt{2a^2 + \sqrt{2a^4 - b}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2a^2 + \sqrt{2a^4 - b}} + aa \\ x^2 + x\sqrt{2a^2 - \sqrt{2a^4 - b}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2a^2 - \sqrt{2a^4 - b}} + aa \end{array} \right.$$

&c. &c.

On pourra construire les autres parties de cette table par ce qui a été démontré sur la résolution des quadrinomes, des quinquinomes, & des autres polynomes superieurs.

Pour la seconde table, on pourra se servir de la methode expliquée dans les articles 10.e & 11.e, ou de quelqu'autre.

XLV. Enfin on construira la 3.e table en trouvant les integrales de ces neuf differentielles, $x^m dx$. $\frac{dx}{x+a}$. $\frac{dx}{xx+b}$. $\frac{xdx}{x^2+b}$. $\frac{dx}{xx+ax+b}$. $\frac{xdx}{xx+ax+b}$. $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$. $\frac{x^s dx}{(xx+b)^\delta}$. $\frac{x^s dx}{(xx+ax+b)^\delta}$. dans les quelles a & b sont des quantités quelconques constantes & réelles, positives ou negatives; les exposans s & δ des nombres entiers & positifs; δ plus grand que l'unité; & s plus petit que δ dans la fraction $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, & moindre que 2δ dans les deux fractions suivantes $\frac{x^s dx}{(xx+b)^\delta}$, & $\frac{x^s dx}{(xx+ax+b)^\delta}$. Car autrement il faudroit diviser le numerateur par le denominateur, jusqu'àceque la fraction, qui resteroit après la division, eut les conditions que je viens de dire.

XLVI. Or I. l'integrale $S. x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; & si $m = -1$, l'integrale $S. x^{-1} dx = l. x$, en prennant les logarithmes dans la logarithmique, dont la soûtangente est l'unité.

II. $S. \frac{dx}{x+a} = l. \overline{x+a}$.

III. Si la quantité b est positive dans la fraction $\frac{dx}{xx+b}$; qu'on prenne $\sqrt{b}$ pour le rayon d'un cercle, & A pour un arc du même cercle, dont la tangente est x; & on aura $S. \frac{dx}{xx+b} = \frac{A}{b}$. Mais si b est negative, de sorte que la fraction soit $\frac{dx}{xx-b}$ ou $\frac{-dx}{b-xx}$, on aura $S. \frac{dx}{xx-b} = \frac{-1}{2\sqrt{b}} l. \frac{\sqrt{b}+x}{\sqrt{b}-x}$.

IV. $S. \frac{xdx}{xx+b} = \frac{1}{2} l. \overline{xx+b}$.

V. La fraction $\frac{dx}{xx+ax+b}$, en supposant $x = z - \frac{1}{2} a$, se reduit a celle-ci $\frac{dz}{zz+b-\frac{1}{4}aa}$, qui a la même forme que $\frac{dx}{xx+b}$, que nous venons d'integrer.

VI. De même la fraction $\frac{xdx}{xx+ax+b}$, en faisant $x = z - \frac{1}{2} a$, se change en ces deux-ci $\frac{zdz}{zz+b-\frac{1}{4}aa}$ & $\frac{-\frac{1}{2}adz}{zz+b-\frac{1}{4}aa}$, qui

qui s' integrent comme les fractions $\frac{xdx}{xx+b}$, & $\frac{dx}{xx+b}$.

VII. Pour integrer la fraction $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, je fais $x = z - a$, & je la change par la substitution en celleci $\frac{(z-a)^s dz}{z^\delta}$, laquelle, en developant la puissance s du binome $z - a$, se change en cette suite finie $z^{s-\delta} dz - saz^{s-\delta-1} dz + \frac{s.s-1}{1.2} a^2 z^{s-\delta-2} dz - \frac{s.s-1.s-2}{1.2.3} a^3 z^{s-\delta-3} dz +$ &c., dont chaque terme s' integre comme la differentielle $x^{-m} dx$. On aura donc $S. \frac{(z-a)^s dz}{z^\delta} = \frac{z^{s-\delta+1}}{s-\delta+1} - \frac{saz^{s-\delta}}{s-\delta} + \frac{s.s-1.a^2 z^{s-\delta-1}}{2(s-\delta-1)} - \frac{s.s-1.s-2.a^3 z^{s-\delta-2}}{2.3.(s-\delta-a)}$ + &c. Quand dans le premier terme de cette suite l' exposant $s - \delta + 1$ s' evanouit, aulieu de $\frac{z^{s-\delta+1}}{s-\delta+1}$ il faut mettre $l.z$; car dans ce cas $z^{s-\delta} dz = z^{-1} dz$

VIII. Pour trouver l' integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{(b+x^2)^\delta}$, il faut distinguer deux cas; le premier, lorsque s est un nombre impair, & le second, lorsque c' est un nombre pair.

Dans le premier cas, je mets $2m+1$ aulieu de s, supposant que m est un nombre entier positif quelconque, ou zero; & la fraction $\frac{x^{2m+1} dx}{(b+xx)^\delta}$, en faisant $xx = z - b$, se

se change en celleci $\frac{\frac{1}{a}(z-b)^m dz}{z^\delta}$, qu'on integrera comme la fraction $\frac{(z-a)^\gamma dz}{z^\delta}$. [VII.]

Dans le second cas, je mets $2m$ au lieu de r, supposant que m est un nombre entier positif quelconque, ou zero; & je trouve par la 7.e prop. du traité des quadratures des courbes de Mr. Newton, que l'integrale de la differentielle $\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^\delta}$ est $= \frac{x^{2m+1}}{(2\delta b-2b)\times(b+xx)^{\delta-1}} - \frac{(2m+3-2\delta)}{2\delta b-2b}.S.\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^{\delta-1}}$. Or l'integrale $S.\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^{\delta-1}}$ se peut toûjours trouver par les formules ci dessus, pourvu que $\delta = 2$. Car si $m = 0$, la fraction $\frac{x^{2m}dx}{b+xx}$ devient $\frac{dx}{b+xx}$, que nous avons integrée au nombre III. Si $m = 1$, la fraction devient $\frac{x^2dx}{x^2+b} = dx - \frac{bdx}{b+xx}$, dont l'integrale est $= x - bS.\frac{dx}{b+xx}$. Si $m = 2$, la fraction est $\frac{x^4dx}{x^2+b} = x^2dx - bdx + \frac{bbdx}{b+xx}$, dont l'integrale est $= \frac{1}{3}x^3 - bx + bbS.\frac{dx}{b+xx}$. Si $m = 3$, la

fraction

fraction sera $\frac{x^6 dx}{xx+b} = x^4 dx - bx^2 dx + b^2 dx - \frac{b^3 dx}{x^2+b}$,

donc l' integrale est $= \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} bx^3 + bbx - b^3 S. \frac{dx}{xx+b}$.

Et generalement $\frac{x^{2m} dx}{x^2+b} = x^{2m-2} dx - b x^{2m-4} dx$
$+ b^2 x^{2m-6} dx - b^3 x^{2m-8} dx + b^4 x^{2m-10} dx \ldots\ldots$
$\mp \frac{b^m dx}{b+xx}$; dont l' integrale est $= \frac{x^{2m-1}}{2m-1} - \frac{bx^{2m-3}}{2m-3}$
$+ \frac{b^2 x^{2m-5}}{2m-5} - \frac{b^3 x^{2m-7}}{2m-7} + \frac{b^4 x^{2m-9}}{2m-9} \ldots\ldots$
$\mp b^m S. \frac{dx}{b+xx}$. Il faut continuer cette suite, avant de parvenir au terme $b^m S. \frac{dx}{b+xx}$, jusqu' a ceque l' exposant de la variable x soit egal a l' unité.

Si l'on designe par B l' integrale $S. \frac{x^{2m} dx}{b+xx}$, que nous venons de trouver; on aura, en supposant $\delta = 2$, l' integrale $S. \frac{x^{2m} dx}{(b+xx)^2} = \frac{x^{2m+1}}{2b(b+xx)} - \frac{(2m-1).B}{2b}$, que j' appelle C.

Et si $\delta = 3$, on aura $S. \frac{x^{2m} dx}{(b+xx)^3} = \frac{x^{2m+1}}{4b(b+xx)^2}$
$- \frac{(2m-3).C}{4b}$, que je designe par D.

Et si

Et si $\delta = 4$, on aura $S. \frac{x^{2m} dx}{(b + xx)^4} = \frac{x^{2m+1}}{4b(b+xx)^3} - \frac{(2m-5).D}{6b}$. Et ainsi de suite à l' infini ; car on voit assez la progression.

IX. Enfin la differentielle $\frac{x^s dx}{(xx + ax + b)^\delta}$, en faisant $x = z - \frac{1}{2} a$, se change en celle-ci $\frac{(z - \frac{1}{2} a)^s dz}{(zz + b - \frac{1}{4} aa)^\delta} =$

$$\frac{z^s dz}{(zz + b - \frac{1}{4} aa)^\delta} - \frac{\frac{1}{2} saz^{s-1} dz}{1.(zz + b - \frac{1}{4} aa)^\delta} + \frac{\frac{1}{4} s.s-1.a^2 z^{s-2} dz}{1.2.[zz + b - \frac{1}{4} aa]^\delta} - \frac{\frac{1}{8} s.s-1.s-2.a^3 z^{s-3} dz}{1.2.3.[zz + b - \frac{1}{4} aa]^\delta} + \&c.$$

Or chacun des termes de cette suite finie a la même forme que la fraction $\frac{x^s dx}{[b + xx]^\delta}$, que nous venons d' integrer. On pourra donc construire facilement la troisieme table.

XLVI. Exemple. On demande la quadrature d' une courbe, dont les coordonnées perpendiculaires sont x & y, & l' equation $y = \frac{[z^{\frac{1}{4}} + 2] \times [z^{\frac{1}{4}} - 2]}{[z^{\frac{1}{4}} + 1] \times [z^{\frac{1}{2}} + 1]^3}$.

On aura pour l' element de l' aire $y dz = \frac{[z^{\frac{1}{4}} + 2]}{[z^{\frac{1}{4}} + 1]} \times \frac{[z^{\frac{1}{4}} - 2] dz}{[z^{\frac{1}{4}} + 1]^3}$. Pour reduire les exposans en nombres entiers,

ers, qu'on fasse $z = x^4$; & l'on aura par la substitution

$$dz = \frac{(x+2)\times(x-2)\times 4x^3dx}{(x+1)\times(x^2+1)^3} = \frac{(4x^6 - 8x^5 - 16x^4 + 32x^3).dx}{(x+1)\times(x^6+3x^4+3x^2+1)}$$

Qu'on suppose $\frac{4x^6 - 8x^5 - 16x^4 + 32x^3}{(x+1)\times(x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1}$

$$+ \frac{Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + Fx + G}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}$$

$$= \frac{\begin{matrix} Ax^6 & + Cx^5 & + 3Ax^4 & + Ex^3 & + 3Ax^2 & + A \\ + B & + B & + D & + D & + F & + Gx \\ & & + C & & + E & + F & + G \end{matrix}}{(x+1)\times[x^2+1]^3}$$

Et en comparant termes à termes les numerateurs de ces deux fractions, on aura les equations suivantes. $A + B = 4$. $C + B = -8$. $3A + D + C = -16$. $E + D = 32$. $3A + E + F = 0$. $G + F = 0$. & $A + G = 0$.

Par lesquelles on trouve $A = \frac{-9}{2}$. $B = \frac{17}{2}$. $C = \frac{-33}{2}$. $D = 14$. $E = 18$. $F = \frac{-9}{2}$. & $G = \frac{9}{2}$.

$$\text{Donc } dz = \frac{-\frac{9}{2}dx}{x+1} + \frac{\frac{17}{2}x^5dx}{[x^2+1]^3} - \frac{\frac{33}{2}x^4dx}{[x^2+1]^3} + \frac{14x^3dx}{[x^2+1]^3}$$

$$+ \frac{18x^2dx}{[x^2+1]^3} - \frac{\frac{9}{2}xdx}{[x^2+1]^3} + \frac{\frac{9}{2}dx}{[x^2+1]^3}$$

G Or

$$\text{Or S.}\ \frac{-\frac{9}{2}\,dx}{x+1} = \frac{-9}{2}\ .\ l.\ \overline{x+1}\ .$$

$$\text{S.}\ \frac{\frac{17}{2}x^5 dx}{[xx+1]^3} = \frac{17}{4}\ .\ l.\overline{xx+1} + \frac{17}{2[xx+1]}\ \frac{-17}{8[xx+1]^2}.$$

$$\text{S.}\ \frac{14x^3 dx}{[xx+1]^3} = \frac{-7}{xx+1} + \frac{7}{2\,[xx+1]^2}\ .$$

$$\text{S.}\ \frac{-\frac{9}{2}x dx}{[xx+1]^3} = \frac{9}{8\,[xx+1]^2}\ .$$

Et si l'on designe par $\mathcal{A}$ l'arc d'un cercle, dont la tangente soit x ou $z^{\frac{1}{4}}$, & le rayon 1; les integrales des autres termes seront

$$\text{S.}\ \frac{-\frac{33}{2}x^4 d\,x}{(1+xx)^3} = \frac{-33\,x^5}{8\,(1+x\,x)^2}\ \frac{+33\,x^5}{16\,(1+x\,x)}$$
$$\frac{-33x^3+99x-99\mathcal{A}}{16}\ .$$

$$\text{S.}\ \frac{18x^2 d\,x}{[1+xx]^3} = \frac{9x^3}{2\,[1+xx]^2}\ \frac{+9x^3}{4\,[1+xx]}\ \frac{-9x+9\mathcal{A}}{4}.$$

$$\text{S.}\ \frac{\frac{9}{2}\,dx}{(1+xx)^3} = \frac{9x}{8\,(1+xx)^2}\ \frac{+27x}{16\,(1+xx)}\ \frac{+27\mathcal{A}}{16}.$$

La somme de toutes ces integrales, c'est a dire, l'integrale

$$\text{S.}\,ydz = \frac{17\,l.\,\overline{xx+1}-18\,l.\,\overline{x+1}}{4}\ \frac{-33x^5+36x^3+9x+20}{8\,[1+xx]^2}\ +$$